DT: 519.866;336.764/.768
klíčová slova: hedging – hedgingová strategie – hedgingové portfolio – delta hedging – minimalizace rozptylu – minimalizace value at risk – maximalizace střední hodnoty funkce užitku – minimalizace střední hodnoty ztráty – finanční derivát

Přístupy k eliminaci finančních rizik na bázi finančních hedgingových strategií

Zdeněk ZMEŠKAL*

1. Úvod

Finanční rizika jsou jednou ze základních charakteristik finančního rozhodování. Z toho také vyplývá nepopiratelný význam hedgingu (zajišťování) finančních rizik. Tento fakt je navíc umocněn rostoucí mírou volatility, propojenosti, rychlosti, vzájemného ovlivňování, zpětnými vazbami a globalizačními tendencemi v ekonomice.

Při eliminaci finančních rizik se rozlišuje podle způsobu eliminace rizik: *nesystematické* (jedinečné, specifické) riziko eliminovatelné diverzifikací a *systematické* (tržní, faktorové) riziko eliminovatelné hedgingem (zajišťováním). Úlohu hedgingu můžeme charakterizovat tak, že máme v držení jedno rizikové aktivum (nebo portfolio aktiv) a spojením s novou skupinou aktiv (zpravidla se jedná o deriváty) chceme vytvořit nové tzv. hedgingové portfolio, které bude zajištěno proti pohybu rizikových faktorů. To znamená, že přírůstek jeho hodnoty bude vůči těmto změnám podle možností co nejvíce imunní.

Metody hedgingu lze charakterizovat a rozlišovat podle celé řady hledisek.

(a) podle počtu revizí v čase: (1) *statické* (*pasivní*) neboli na jedno období, (2) *dynamické* (*aktivní*) neboli na více období;

(b) podle frekvence revizí: (1) *diskrétní*, (2) *spojité*;

(c) podle způsobu eliminace rizika: (1) *celkové riziko* (tj. systematické i jedinečné), (2) *systematické riziko* odstranitelné hedgingem, (3) *jedinečné* odstranitelné diverzifikací;

(d) podle hedgingových kritérií: hedgingové strategie (1) *faktorově neutrální* – do této kategorie patří například delta hedging, delta-gama hedging, imunizace na bázi durace apod; (2) *minimální rozptyl* (minimum variance); (3) *minimum value at risk*; (4) *minimalizace střední hodnoty ztráty* (*shortfall*); (5) *maximalizace střední hodnoty funkce užitku*; (6) *minimalizace veličiny RAROC = value at risk / capital* (*risk adjusted return on capital*);

* VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, katedra financí (Zdenek.Zmeskal@vsb.cz)

Tento příspěvek vznikl částečně v rámci projektu Grantové agentury České republiky (GAČR) 402/02/1046.

(e) podle typu zajišťovaného finančního aktiva: hedging na (1) *akcie*, (2) *obligace*, (3) *měnu*, (4) *úroky*, (5) *komoditu*;

(f) podle typu finančních rizik: (1) *tržní* (akciové, komoditní, úrokové, měnové), (2) *kreditní* související s nesplněním závazků;

(g) podle toho, zda je zajišťování prováděno vůči nějakému vzoru: (1) *benchmark* (*tracking*) *hedging*, (2) *hedging bez vzoru* (*etalonu*).

S komplexním popisem a konceptem jednotlivých hedgingových strategií se zpravidla v koncentrované podobě setkat nelze. Proto je záměrem příspěvku popsat, odvodit a ukázat možnosti aplikace hedgingových strategií na bázi: delta hedgingu, minimalizace rozptylu, minimalizace hodnoty *value at risk*, maximalizace střední hodnoty funkce užitku a minimalizace střední hodnoty ztráty. Cílem je rovněž popsat celou řadu strategií a jejich modifikací, avšak s co největší přípustnou mírou obecnosti. Uvedený příspěvek tedy může sloužit jako přehledový materiál o vybraných konceptech a řešeních hedgingových strategií. Dalším motivem je také ukázat strategie uplatnitelné v malé otevřené ekonomice se slabým derivátovým trhem.

Vše budeme prezentovat na nejjednodušším případě hedgingového portfolia, pro dvě aktiva – jedno rizikové a jeden zajišťovací instrument pro jedno období. Příklady aplikací budou ukázány na různých typech rizikových aktiv (akcie, obligace, měna, cena komodity) a zajišťovacích instrumentů (forward, futures, opce, burzovní index).

Ve většině případů se předpokládá, že zajišťovatel má Q stejných rizikových aktiv s jednotkovou cenou S, tato aktiva chce zajistit zpravidla pomocí finančních derivátů s jednotkovou cenou f a množstvím kontraktů h, přičemž počet derivátů na jeden kontrakt je N. Vytvoří se tedy hedgingové portfolio Π:

$$\Pi_t = Q \cdot S_t - h \cdot N \cdot f_t$$

jehož přírůstek hodnoty má být co nejméně rizikový:

$$\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot N \cdot \Delta f$$

2. Strategie delta hedgingu

U této strategie se vychází z toho, že přírůstek hodnoty hedgingového portfolia je obecně vyjádřen lineární funkcí, zpravidla pomocí aproximace Taylorova rozvoje 1. stupně. Potom se hledá takové optimální složení hedgingového portfolia h (neznámou je množství finančních derivátů), aby přírůstek hodnoty hedgingového portfolia $\Delta\Pi = 0$. Touto strategií lze eliminovat pouze faktorové (systematické) riziko.

2.1 Delta hedging na měnu

U tohoto případu je rizikovým faktorem (náhodnou veličinou) kurz měny. Hodnota hedgingového portfolia – za předpokladu, že platby v cizí měně jsou stanoveny k okamžiku T, zajišťovacím instrumentem je měnový derivát (opce, futures, swap apod.) – je dána vzhledem k současné (tržní) hodnotě zajišťovaného měnového kurzu vztahem:

$$\Pi_t = Q \cdot e^{-Rf \cdot (T-t)} \cdot K_t - h \cdot N \cdot f_{t,TT}(K) \tag{2.1.1}$$

kde Q je množství zajišťované cizí měny, K je aktuální kurz měny, N je množství cizí měny na jeden derivát, f je jednotková cena derivátu, t je moment zajišťování, T okamžik platby v cizí měně, TT doba zralosti (expirace) derivátu a platí $t<T<TT$, h je počet forwardových kontraktů pro zajištění, R_f je zahraniční úroková sazba.

Pro přírůstek hodnoty hedgingového portfolia pak platí, že:

$$\Delta\Pi = Q \cdot e^{-Rf \cdot (T-t)} \cdot \Delta K - h \cdot N \cdot \Delta f(K) \tag{2.1.2}$$

Základním východiskem faktorově neutrálního přístupu je předpoklad, že přírůstek hodnoty jakéhokoliv aktiva lze aproximovat pomocí Taylorova rozvoje. Při aplikaci jednofaktorového Taylorova rozvoje je přírůstek hodnoty funkce $\Delta F(x)$ obecně definován následovně:

$$\Delta F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} \cdot \Delta x^3 + \dots \tag{2.1.3}$$

Využitím prvního (lineárního) stupně Taylorova rozvoje (delta aproximace) pro přírůstek hodnoty derivátu a dosazením do (2.1.2) dostáváme:

$$\Delta\Pi = Q \cdot e^{-Rf \cdot (T-t)} \cdot \Delta K - h \cdot N \cdot \frac{\partial f(K)}{\partial K} \cdot \Delta K \tag{2.1.4}$$

Aby byla splněna podmínka pro hedging, pak $\Delta\Pi = 0$ a z toho vyplývá, že:

$$h = \frac{Q \cdot e^{-Rf \cdot (T-t)}}{N \cdot \frac{\partial f(K)}{\partial K}} = \frac{Q \cdot e^{-Rf \cdot (T-t)}}{N \cdot delta} \tag{2.1.5}$$

2.2 Delta hedging na obligaci

Tento typ hedgingu je nazýván imunizace na bázi durace, která obecně vyjadřuje citlivost ceny obligace na změny úrokových sazeb. Náhodnou veličinou je tržní cena obligace; ta je však ovlivněna úrokovými sazbami, tedy rizikovým faktorem je úroková sazba (výnos do splatnosti). Podle Taylorova rozvoje přírůstek hodnoty aktiva v závislosti na změně úrokových sazeb je obecně:

$$\Delta P(y) = \frac{dP(y)}{dy} \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P(y)}{dy^2} \Delta y^2 + \dots$$

Pro lineární aproximaci platí:

$$\Delta P(y) = \frac{dP(y)}{dy} \cdot \Delta y \tag{2.2.1}$$

Vyjádříme-li modifikovanou duraci (MD), která charakterizuje relativní změnu ceny aktiva k absolutní změně úrokové sazby (výnosu do splatnosti), následovně:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = -MD \tag{2.2.2}$$

kde:

$$MD = \frac{1}{P} \cdot \sum_{t=1}^{N} t \cdot CF_t \cdot (1 + y)^{-t-1}$$

a dosadíme-li do (2.2.1), pak lze obecně přírůstek ceny finančního instrumentu závislého na úrokových sazbách vyjádřit takto:

$$\Delta P(y) = -(MD \cdot P) \cdot \Delta y \tag{2.2.3}$$

Přírůstek hodnoty hedgingového portfolia je obecně vyjádřen takto:

$$\Delta \Pi = Q \cdot \Delta P_B - h \cdot N \cdot \Delta P_f \tag{2.2.4}$$

kde P_B je tržní cena obligace a P_f je tržní cena futures na obligaci. Aplikací (2.2.3) na (2.2.4) s požadavkem, aby přírůstek hodnoty portfolia byl bezrizikový, dostáváme:

$$\begin{aligned}\Delta \Pi = Q \cdot (-1)(MD_B \cdot P_B) \cdot \Delta y - h \cdot N \cdot (-1)(MD_f \cdot P_f) \cdot \Delta y = \\ = -(Q \cdot MD_B \cdot P_B - h \cdot N \cdot MD_f \cdot P_f) \cdot \Delta y = 0\end{aligned}$$

přitom MD_B a MD_f jsou modifikované durace obligací a futures. Z toho plyne, že optimální počet kontraktů je určen takto:

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{MD_B \cdot P_B}{MD_f \cdot P_f} \tag{2.2.5}$$

2.3 Delta hedging na bázi burzovního indexu

V tomto případě je zajišťovacím instrumentem burzovní index nebo futures na burzovní index. Vychází se z předpokladu, že hodnota hedgingového portfolia je určena podle vztahu:

$$\Pi = Q \cdot S - h \cdot M \tag{2.3.1}$$

kde Q je počet akcií, S je jednotková cena akcie, h je zajišťovací koeficient (počet kontraktů na burzovní index) a M je tržní cena burzovního indexu nebo futures na burzovní index. Touto strategií lze eliminovat pouze systematické (tržní) riziko.

Pro přírůstek hodnoty portfolia platí:

$$\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot \Delta M \tag{2.3.2}$$

Aplikací beta verze modelu CAPM-SML lze vyjádřit výnosy jednotlivých aktiv za předpokladu, že bezriziková sazba $R_F = 0$ a β je koeficient charakterizující citlivost výnosu aktiva na tržní portfolio (aproximativně burzovní index), jako:

$$\frac{\Delta S}{S} = R_S = \beta_S \cdot R_M, \qquad \frac{\Delta M}{M} = R_M = \beta_M \cdot R_M$$

a tedy:

$$\Delta S = S \cdot \beta_S \cdot R_M, \quad \Delta M = M \cdot R_M \tag{2.3.3}$$

protože $\beta_M = 1$.

Dosazením (2.3.3) do (2.3.2) dostáváme:

$$\Delta\Pi = Q \cdot S \cdot \beta_S \cdot R_M - h \cdot M \cdot R_M \tag{2.3.4}$$

Má-li být portfolio zajištěno proti riziku, pak musí platit, že $\Delta\Pi = 0$, a z (2.3.4) vyplývá, že:

$$h = \frac{Q \cdot S \cdot \beta_S}{M} \tag{2.3.5}$$

3. Strategie minimalizace rozptylu

U této strategie se postupuje tak, že je vytvořen rozptyl přírůstku hedgingového portfolia, ten je minimalizován a takto je hledáno optimální složení hedgingového portfolia, množství derivátů h. Touto strategií lze eliminovat zejména faktorové (systematické) riziko a rovněž částečně jedinečné (nesystematické) riziko.

3. 1 Minimalizace rozptylu na komoditu

Za předpokladu, že hedgingové portfolio je tvořeno komoditou s jednotkovou cenou (S) a krátkou pozicí v zajišťovacím instrumentu, kterým je derivát na komoditu (f), je jeho hodnota v čase t rovna:

$$\Pi_t = Q \cdot S_t - h \cdot N \cdot f_{t,TT} \tag{3.1.1}$$

kde Π je hodnota portfolia, S je hodnota aktiva, h je zajišťovací poměr a $f_{t,TT}$ je hodnota zajišťovacího instrumentu v čase t a expiračním momentem TT, kde Q je množství komodity a N je množství aktiv na jeden derivátový kontrakt.

V čase T je hodnota hedgingového portfolia rovna:

$$\Pi_T = Q \cdot S_T - h \cdot N \cdot f_{T,TT}$$

Změna hodnoty portfolia je tedy:

$$\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot N \cdot \Delta f \tag{3.1.2}$$

Rozptyl hodnoty portfolia je dán vztahem:

$$var(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot var(\Delta S) + h^2 \cdot N^2 \cdot var(\Delta f) + 2 \cdot (-h) \cdot Q \cdot N \cdot cov(\Delta S; \Delta f) \tag{3.1.3}$$

Naším cílem je minimalizovat riziko změny hodnoty hedgingového portfolia; proto hledáme optimální zajišťovací poměr *(h)*, tedy:

$$\frac{d\ var(\Delta\Pi)}{dh} = 2 \cdot h \cdot N^2 var(\Delta f) - 2 \cdot Q \cdot N \cdot cov(\Delta S; \Delta f) = 0$$

Z toho plyne, že:

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{cov(\Delta S; \Delta f)}{var(\Delta f)}$$

nebo také: (3.1.4)

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta f}}\ \rho_{\Delta S \Delta f} \tag{3.1.5}$$

Dosazením za h z (3.1.4) do (3.1.3) je optimální var^{*h} rovno:

$$var^{*h}(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot \left[var(\Delta S) - \frac{cov(\Delta S; \Delta f)}{var(\Delta f)}\right] \tag{3.1.6}$$

nebo také:

$$var^{*h}(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot var(\Delta S) \cdot \lfloor 1 - \rho^2_{\Delta S \Delta f} \rfloor \tag{3.1.7}$$

Pro směrodatnou odchylku lze pak psát:

$$\sigma^{*h}_{\Delta\Pi} = Q \cdot \sigma_{\Delta S} \cdot \sqrt{(1 - \rho^2_{\Delta S \Delta f})} \tag{3.1.8}$$

3.2 Minimalizace rozptylu na komoditu pomocí výnosů

Předpokládáme, že charakteristiky aktiv jsou stanoveny pomocí výnosů; proto je nezbytné modifikovat obecný vztah pro určení optimálního počtu kontraktů podle (3.1.4):

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{cov(\Delta S; \Delta f)}{var(\Delta f)}$$

Nyní vyjádříme jednotlivé složky prostřednictvím výnosů:

$$cov(\Delta S; \Delta f) = cov\left(S \cdot \frac{\Delta S}{S}; f \cdot \frac{\Delta f}{f}\right) = S \cdot f \cdot cov\left(\frac{\Delta S}{S}; \frac{\Delta f}{f}\right) = \\ = S \cdot f \cdot cov(R_S; R_f) \tag{3.2.1}$$

$$var(\Delta f) = var\left(f \cdot \frac{\Delta f}{f}; f \cdot \frac{\Delta f}{f}\right) = f^2 \cdot var\left(\frac{\Delta f}{f}\right) = f^2 \cdot var(R_f) \tag{3.2.2}$$

Dosazením (3.2.1) a (3.2.2) do (3.1.4) dostáváme:

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{S \cdot f}{f^2} \cdot \frac{cov(R_S; R_f)}{var(R_f)} = \frac{Q}{N} \cdot \frac{S}{f} \cdot \frac{cov(R_S; R_f)}{var(R_f)} \tag{3.2.3}$$

Totéž lze vyjádřit prostřednictvím korelace následovně:

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{S}{f} \cdot \frac{\sigma_{R_S}}{\sigma_{R_f}} \cdot \rho_{R_S R_f} \tag{3.2.4}$$

Směrodatnou odchylku hedgingového portfolia lze odvodit tak, že jednotlivé směrodatné odchylky jsou vyjádřeny modifikovanými sazbami pomocí výnosů následovně:

$$\sigma_{\Delta S} = \sigma\left(S \cdot \frac{\Delta S}{S}\right) = S \cdot \sigma\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = S \cdot \sigma_{R_S} \tag{3.2.5}$$

$$\sigma_{\Delta f} = \sigma\left(f \cdot \frac{\Delta f}{f}\right) = S \cdot \sigma\left(\frac{\Delta f}{f}\right) = f \cdot \sigma_{R_f} \tag{3.2.6}$$

Je známo, že:

$$\rho_{\Delta S \Delta f} = \frac{cov(\Delta S; \Delta f)}{\sigma_{\Delta S} \cdot \sigma_{\Delta f}} = \frac{S \cdot f \cdot cov(R_S; R_f)}{S \cdot \sigma(R_S) \cdot f \cdot \sigma(R_f)} = \frac{cov(R_S; R_f)}{\sigma(R_S) \cdot \sigma(R_f)} = \rho_{R_S R_f} \tag{3.2.7}$$

Dosazením z (3.2.5) do (3.1.8) pak:

$$\sigma^{*h}(\Delta \Pi) = Q \cdot S \cdot \sigma_{R_S} \cdot \sqrt{(1 - \rho^2_{R_S R_f})} \tag{3.2.8}$$

Efekt hedgingu se určí následovně:

$$Ef = \frac{var(S) - var^{*h}(\Delta \Pi)}{var(S)} = \\ = \frac{Q^2 \cdot S^2 \cdot var(R_S) - Q^2 \cdot S^2 \cdot var(R_S) \cdot \lfloor 1 - \rho^2_{R_S R_f} \rfloor}{Q^2 \cdot S^2 \cdot var(R_S)} = \rho^2_{R_S R_f} \tag{3.2.9}$$

3.3 Minimalizace rozptylu na měnu pomocí křížového kurzu

Jedná se o případ, kdy není na trhu futures na měnu, kterou chce firma zajistit; proto musí využít futures na jinou měnu. Například, česká firma posuzuje možnost zajistit pozici v EUR pomocí kontraktu futures. Vzhledem k tomu, že futures kontrakt na CZK/EUR není na trhu obchodován, použije jako náhradu futures kontrakt USD/EUR. Předpokládá se, že kurz CZK/USD je v daném intervalu konstantní.

Pokud by existoval futures kontrakt na CZK/EUR, pak podle (3.1.4) by byl optimální počet kontraktů určen takto:

$$h = \frac{Q}{N} \cdot \frac{cov(\Delta S_{CZK/EUR}; \Delta f_{CZK/EUR})}{var(\Delta f_{CZK/EUR})} \tag{3.3.1}$$

Pomocí křížového kurzu lze stanovit požadovaný kurz následovně:

$$S_{CZK/EUR} = S_{CZK/USD} \cdot S_{USD/EUR} \tag{3.3.2}$$

Požadovaný kurz lze tedy stanovit obecně takto:

$$S_{CZK/EUR} = K \cdot S_{USD/EUR}$$

a analogicky pro futures:

$$\Delta f_{CZK/EUR} = K \cdot \Delta f_{USD/EUR} \tag{3.3.3}$$

Dosazením (3.3.3) do (3.3.1) dostáváme:

$$\begin{aligned} h &= \frac{Q}{N} \cdot \frac{cov(\Delta S_{CZK/EUR}; K \cdot \Delta f_{USD/EUR})}{var(K \cdot \Delta f_{USD/EUR})} = \\ &= \frac{Q}{N} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{cov(\Delta S_{CZK/EUR}; \Delta f_{USD/EUR})}{var(\Delta f_{USD/EUR})} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

To lze vyjádřit pomocí korelace následovně:

$$h = \frac{Q}{N \cdot K} \cdot \frac{\sigma(\Delta S_{CZK/EUR})}{\sigma(\Delta f_{USD/EUR})} \cdot \rho_{\Delta S_{CZK/USD} \Delta f_{USD/EUR}} \tag{3.3.5}$$

Je třeba upozornit, že v tomto případě se zjednodušeně předpokládá, že křížový kurz je konstantní. Pro krátké období lze tento předpoklad považovat za splněný.

4. Strategie minimalizace *value at risk*

Tento přístup slouží k zajištění proti riziku velkých ztrát. Základem je tedy úvaha, že s pravděpodobností α může být potenciální náhodný přírůstek hodnoty portfolia menší než předem stanovená hodnota minus *VAR*. Přitom *VAR* tedy vyjadřuje hodnotu minimální ztráty při pravděpodobnosti (významnosti) α za časový interval:

$$Pr(\Delta \Pi \leq -VAR) = \alpha \tag{4.1}$$

Pro propočet *VAR* a možnost řešení platí obecně totéž co pro kritérium minimalizace rozptylu. V případě, že přírůstky hodnoty faktorů mají normální rozdělení a zvažujeme delta neutrální model, pak po substituci $g = \Delta\Pi + VAR$ a pro normalizaci platí, že:

$$Pr\left[\frac{g - E(g)}{\sigma(g)} \leq \frac{0 - E(g)}{\sigma(g)}\right] = \alpha \qquad (4.2)$$

Pokud $z = \dfrac{0 - E(g)}{\sigma(g)}$, podle (4.2) platí $\Phi(z) = \alpha$, kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, a tedy:

$$z = \Phi^{-1}(\alpha) \qquad (4.3)$$

Zpětným dosazením za g do z a následně z do (4.3) lze určit analyticky výsledný obecný vztah:

$$VAR = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(\Delta\Pi) - E(\Delta\Pi) \qquad (4.4)$$

V případě, že $\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot N \cdot \Delta f$, pak $E(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f)$ je střední hodnota, $var(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot var(\Delta S) - 2h \cdot N \cdot Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f) + h^2 \cdot N \cdot var\,(\Delta f)$ je rozptyl portfolia a $\Phi^{-1}(\alpha)$ je inverzní funkce k distribuční funkci normovaného normálního rozdělení na hladině pravděpodobnosti (významnosti) α.

Empiricky bylo ověřeno, že krátkodobě se střední hodnoty výnosů finančních aktiv rovnají nule, a tedy, že střední hodnota $E(\Delta\Pi)$ je rovněž rovna nule. Vzhledem k symetrii normovaného normálního rozdělení, tj. $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$, je možné VAR formulovat následovně:

$$VAR = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma(\Delta\Pi) \qquad (4.5)$$

To je často uváděný tvar pro propočet hodnoty rizika VAR.

Optimální složení hedgingového portfolia lze stanovit následovně:

$$\frac{\partial VAR(\Delta\Pi)}{\partial h} = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \left[var(\Delta\Pi)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial var(\Delta\Pi)}{\partial h} - \frac{\partial E(\Delta\Pi)}{\partial h} = 0 \qquad (4.6)$$

Po úpravách je optimální řešení následující:

$$h_{1,2} = \frac{cov(a; b)}{var(b)} \pm \sqrt{\frac{-c \cdot var(a) \cdot (1 - \rho^2)}{var(b) \cdot \left[c - var(b)\right]}} \qquad (4.7)$$

kde $a = Q \cdot \Delta S$; $b = -N \cdot \Delta f$; $c = \dfrac{E^2(b)}{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}$.

První složka (4.7) odpovídá kritériu minimalizace rozptylu, druhá pak slouží k identifikaci hodnoty *value at risk*.

Hodnotu optimálního portfolia lze rovněž nalézt pomocí úlohy optimálního matematického programování.

Úloha 1 (*optimální hedgingové portfolio pro kritérium VAR*)

Účelová funkce:

$VAR = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(\Delta\Pi) - E(\Delta\Pi) \rightarrow \min$

Omezující podmínky:

$h \geq 0$

kde $E(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f)$

$var(\Delta\Pi) = Q^2 . var(\Delta S) - 2h \cdot N \cdot Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f) + h^2 \cdot N^2 \cdot var(\Delta f)$

Je tedy zřejmé, že pro symetrická rozdělení s nulovou střední hodnotou (může se týkat pouze lineárních instrumentů, krátkodobých odhadů) jsou výsledky hedgingových strategií minimalizace rozptylu a *value at risk* totožné.

U tohoto kritéria je nezbytné poznamenat, že i když je hojně prakticky využíváno, v případě, že náhodné veličiny nemají normální rozdělení, není splněna podmínka subaditivity. To znamená, že vždy neplatí, že:

$$VAR(x + y) \leq VAR(x) + VAR(y)$$

Blíže například (Artzner a kol., 1999).

5. Strategie maximalizace střední hodnoty funkce užitku

Jedná se například o situaci zajištění pomocí futures na bázi kritéria maximalizace střední hodnoty funkce užitku. Předpokládá-li se, že funkce užitku je kvadratická ve tvaru:

$$U(x) = x - \frac{1}{2} b \cdot x^2$$

pak je známo podle Markowitzova modelu *mean-variance*, že střední hodnota funkce užitku má tvar

$$V(x) = E\left[U(x)\right] = E\left(x - \frac{1}{2} b \cdot x^2\right) = E(x) - r \cdot var(x)$$

kde r je parametr postoje k riziku.

Zajišťované portfolio je tvořeno rizikovým aktivem, například komoditou (S), a zajišťovacím instrumentem, futures na komoditu (f). Dále je známo plánované množství komodity (Q) a počet jednotek komodity na jeden kontrakt futures (N). Tedy:

$$\Pi_t = Q \cdot S_t - h \cdot N \cdot f_{t,TT} \qquad (5.1)$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia potom platí:

$$\Delta\Pi = Q \cdot \Delta S - h \cdot N \cdot \Delta f \qquad (5.2)$$

Střední hodnota funkce užitku přírůstku hodnoty portfolia je určena následovně:

$$V(\Delta\Pi) = E(\Delta\Pi) - r \cdot var(\Delta\Pi) \qquad (5.3)$$

Střední hodnota a rozptyl hedgingového portfolia jsou určeny takto:

$$E(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f) \qquad (5.4)$$

$$var(\Delta\Pi) = Q^2 \cdot var(\Delta S) - 2h \cdot N \cdot Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f) + h^2 \cdot N^2 \cdot var(\Delta f) \qquad (5.5)$$

Tedy dosazením (5.4) a (5.5) do (5.3):

$$V(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f) - r \cdot Q^2 \cdot var(\Delta S) + r \cdot 2h \cdot N \cdot \\ \cdot Q\, cov(\Delta S; \Delta f) - r \cdot h^2 \cdot N^2 \cdot var(\Delta f) \qquad (5.6)$$

Pro maximální střední hodnotu funkce užitku tedy platí:

$$\frac{\partial V(\Delta\Pi)}{\partial h} = - N \cdot E(\Delta f) + r \cdot 2 \cdot N \cdot Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f) - r \cdot 2h \cdot N^2 \cdot var(\Delta f) = 0 \qquad (5.7)$$

Výsledkem (5.7) je vztah pro optimální počet kontraktů:

$$h = \frac{E(\Delta f)}{2 \cdot r \cdot N \cdot var(\Delta f)} - \frac{Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f)}{N \cdot var(\Delta f)} \qquad (5.8)$$

Při pohledu na obecný vzorec je zřejmé, že se skládá ze dvou složek. První složka vyjadřuje očekávaný zisk, tedy očekávaný výnos investice. Druhá složka je hedgingová složka identická s kritériem minimalizace rozptylu podle (3.1.4). Vzhledem k tomu, že odhad střední hodnoty finančních veličin bývá doprovázen značnou statistickou chybou, bývá v převážné míře pro hedging používáno kritérium minimalizace rozptylu. Dalším důvodem je fakt, že v případě krátkodobých odhadů bývá střední hodnota rovna nule.

6. Strategie minimalizace střední hodnoty ztráty

U této strategie je cílem minimalizovat nebo zjistit střední hodnotu ztráty pod předem stanovenou hodnotou a. Opět se předpokládá normální rozdělení náhodné veličiny. Obecně je možné tuto hodnotu pro normální rozdělení náhodné veličiny x vyjádřit následovně:

$$E(x|x \leq a) = \frac{1}{\Phi(a)} \int_{-\infty}^{a} x \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{\Phi(a)} \int_{-\infty}^{a} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma(x)}\right)^2} dx \qquad (6.1)$$

Lze ukázat, že po úpravách pro střední hodnotu ztráty platí:

$$E(x|x \leq a) = var(x) + \frac{var(x) \cdot E(x)}{\sqrt{2} \cdot [a - E(x)]} \tag{6.2}$$

Analytické řešení optimálního hedgingového portfolia je komplikovanější pro vyjádření, tudíž je snazší ho nalézt a vyjádřit prostřednictvím úlohy optimálního matematického programování.

Úloha 2 (*optimální hedgingové portfolio pro kritérium střední hodnoty ztráty*)

Účelová funkce:

$$E(\Delta\Pi|\Delta\Pi \leq a) = var(\Delta\Pi) + \frac{var(\Delta\Pi) \cdot E(\Delta\Pi)}{\sqrt{2} \cdot [a - E(\Delta\Pi)]} \rightarrow min$$

Omezující podmínky:

$h \geq 0$

kde $E(\Delta\Pi) = Q \cdot E(\Delta S) - h \cdot N \cdot E(\Delta f)$

$var(\Delta\Pi) = Q^2 . var(\Delta S) - 2h \cdot N \cdot Q \cdot cov(\Delta S; \Delta f) + h^2 \cdot N^2 \cdot var(\Delta f)$

Nabízí se rovněž možnost stanovit mezní hodnotu a jako hodnotu *VAR*.

7. Závěr

V příspěvku byly ukázány základní přístupy a strategie při hedgingu rizika finančních instrumentů. Hlavní pozornost byla věnována objasnění základních konceptů včetně odvození optimálních strategií.

Pro delta hedging jsou základní vztahy (2.1.5), (2.2.5) a (2.3.5), pro minimalizaci rozptylu na bázi přírůstku vstupních veličin vztahy (3.1.4), (3.1.5), (3.1.8), na bázi výnosů vstupních veličin vztahy (3.2.3), (3.2.4), (3.2.8), (3.2.9). Pro křížové kurzy, které slouží jako náhrada za přímé kurzy, za zjednodušujícího předpokladu konstantního křížového kurzu pak vztahy (3.3.4), (3.3.5).

Dále byl odvozen analytický výraz pro metodu *value at risk* a klíčovým vztahem je (4.2). Ukázalo se, že pro symetrická rozdělení s nulovou střední hodnotou (může se týkat pouze lineárních instrumentů, krátkodobých odhadů) jsou výsledky hedgingových strategií minimalizace rozptylu a *value at risk* totožné. Optimální složení portfolia lze rovněž nalézt podle Úlohy 1 (*optimální hedgingové portfolio pro kritérium VAR*).

U metody maximalizace střední hodnoty funkce užitku je klíčovým vztah (5.8). První složka vztahu vyjadřuje očekávaný zisk, tedy očekávaný výnos investice. Druhá složka je hedgingová složka identická s kritériem minimalizace rozptylu.

Propočet střední hodnoty ztráty je stanoven pro normální rozdělení, jak je ukázáno, podle (6.2). Optimální složení portfolia lze nalézt podle Úlohy 2 (*optimální hedgingové portfolio pro kritérium střední hodnoty ztráty*).

Strategie delta hedgingu a minimalizace rozptylu jsou nejvíce prakticky využívanými přístupy při zajišťování finančních rizik. Je tomu tak zejména v situacích symetrických rozdělení pravděpodobností a krátkých období zajišťování. Při výrazných náhodných pohybech podkladových aktiv s nesymetrickým rozdělením zajišťovaných pozic nebo pro delší období zajištění s cílem vyvarovat se velkých potenciálních ztrát je vhodné aplikovat strategie minimalizace *value at risk* a střední hodnoty ztráty. Pokud je finanční subjekt ochoten podstupovat určitá nezajištěná rizika, pak podle sklonu k riziku vyjádřeném užitkovou funkcí lze aplikovat strategii maximalizace střední hodnoty funkce užitku.

V tuzemských podmínkách, v ekonomice českého typu, což je malá ekonomika v transformační fázi, je využití uvedených strategií specifické. U institucí obchodujících se zahraničními subjekty lze při zajišťování pomocí likvidních aktiv (silné měny, komodity s likvidním trhem, úrokové instrumenty silných ekonomik) aplikovat strategie delta hedgingu a minimalizace rozptylu, například v souvislosti se zpevňováním koruny, pohybem cen komodit ap. V určitých případech lze aplikovat metodiku křížových kurzů, jak bylo ukázáno výše. Dále je poměrně dobře možné využívat OTC-trhy s deriváty na krátkodobé úrokové sazby a trhy se státními krátkodobými úrokovými aktivy. Při neexistenci pestrých, likvidních a efektivních sekundárních finančních trhů pak při zajišťování dlouhodobějších rizik přicházejí v úvahu strategie minimalizace *value at risk* a střední hodnoty ztráty. U subjektů se sklonem k riziku lze využít strategii maximalizace střední hodnoty funkce užitku.

Ze skutečnosti, že neustále dochází k růstu rizikovosti finančních instrumentů, růstu volatility, růstu inovací finančních instrumentů a růstu jejich vzájemné provázanosti, a ze slabých sekundárních finančních trhů lze usuzovat, že výše popsaná problematika, a tedy aplikace uvedených metodologií je trvale aktuální při finančním řízení a rozhodování jak nefinančních, tak finančních institucí malých otevřených ekonomik.

LITERATURA

ARTZNER, P. – DELBAEN, J. E. – HEATH, D. (1999): Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 1999, no. 9.

COPELAND, T. E – WESTON, J. F. (1988): *Financial theory and corporate finance.* Addison -Wesley, Reading, New York.

HULL, J. C. (2002): *Options, Futures, and other Derivatives.* Prentice Hall, New York, 2002.

JORION, P. (1997): *Value at risk.* Mc Graw Hill, New York, 1997.

JORION, P. (2002): *Financial Risk Management Handbook 2001-2002.* Wiley Finance, New York, 2002.

LONGERSTAEY, J. – SPENCER, M. (1996): *RiskMetrics – Technical Document.* Riskmetrics Group. J.P. Morgan, New York, 1996.

SERCU, P. – UPPAL, R. (1995): *International Financial Markets and the Firm.* Chapman and Hall, New York – London, 1995.

ZMEŠKAL, Z. (2001) Application of the fuzzy-stochastic methodology to appraising the firm value as a European call option. *European Journal of Operational Research*, vol. 135, 2001, no. 2.

ZMEŠKAL, Z. (2002): *Finanční modely*. Ostrava, VŠB-TU, Ekonomická fakulta, 2002.

ZMEŠKAL, Z. – ČULÍK, M. (2002) *Finanční rozhodování za rizika – sbírka řešených příkladů.* Ostrava, VŠB-TU, Ekonomická fakulta, 2002.

ZMEŠKAL, Z. (2003): Value at risk Methodology under Soft Conditions Approach (fuzzy-stochastic approach). *European Journal of Operational Research.* – fothcomming.

SUMMARY

JEL Classification: C61, D81, E62, G11, G13, G15, P43
Keywords: hedging – delta hedging – variance minimization – value at risk minimization – expected utility maximization – shortfall minimization – financial derivative

Hedging Strategies and Financial Risks

Zdeněk ZMEŠKAL – VŠB-Technical University of Ostrava, Faculty of Economics, Finance Department
(Zdenek.Zmeskal@vsb.cz)

Hedging strategies represent basic instrument used toward eliminating financial risk. Increasing volatility of financial markets and their globalization also lead to higher financial risks. These aspects are especially important for transitional and small open economies. The basic goal of the paper is to show the derivation and application possibilities of select hedging strategies. Five basic hedging strategies — delta hedging, minimum variance, minimum value at risk, maximum expected utility value, and minimum shortfall — are derived and described. All the strategies are derived for two asset portfolios consisting of risk assets (share, bond, commodity price, and exchange rate) and hedged assets (financial derivative). Another common assumption is that random variables are normally distributed. Examples of exchange rate, interest-rate, equity and commodity-risk hedging are described. Several applications are suitable for small open economies that lack liquid capital market with limited secondary derivative market.